Álgebra I
Parcial VII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra I
Parcial VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2023-2024

Asignatura Álgebra I.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María del Pilar Carrasco Carrasco.

Descripción Parcial I

Fecha 13 de noviembre de 2025.

Ejercicio 1. Se pide:

a) [**1 punto**] Sea X un conjunto y $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Demostrar

$$c(A \triangle B) = (A \cap B) \cup (c(A) \cap c(B))$$

Donde $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ es la diferencia simétrica.

b) [**1 punto**] Sea X un conjunto finito no vacío y $f : X \to X$ una aplicación. Demostrar:

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ es inyectiva}$$

c) [**1 punto**] Sea X un conjunto finito no vacío e Y un subconjunto de X. Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ definida por

$$A \sim B \iff A \cup Y = B \cup Y$$

La afirmación "$|\mathcal{P}(X)/\sim| = 1$" es

(i) siempre cierta.

(ii) siempre falsa.

(iii) a veces verdadera y a veces falsa, dependiendo de Y.

Justifique su respuesta.

Ejercicio 2. Se pide:

a) [**1 punto**] Calcula el resto de dividir -3425 entre 19 y, haciendo uso de que la aplicación $R(\cdot; 19) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{19}$ es un homomorfismo de anillos, calcular el resto de dividir $234^3 + (3425)^2$ entre 19.

b) [**1 punto**] Demostrar que el elemento $3+2\sqrt{2}$ es una unidad en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ y calcular $(3+2\sqrt{2})^{-2}$.

c) [**1 punto**] Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Demostrar que el subconjunto $Img(f) \subseteq B$ es un subanillo de B.

Ejercicio 3. Sea $f = (x+2)^5(x^5+3) + x^7 \in \mathbb{Z}_5[x]$ y denotemos también por $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ la aplicación polinómica definida por él, $r \mapsto f(r)$.

a) [**1.5 puntos**] Describir explícitamente la aplicación f.

b) [**1 punto**] ¿Es la aplicación f un homomorfismo de anillos? Si lo es probarlo, si no lo es ¿qué requisitos incumple?

c) [**1 puntos**] Describir explícitamente los conjuntos $f_*(f^*(\{1,2,4\}))$ y $f^*(f_*(\{1,2,4\}))$.

Solución.

Ejercicio 1. Se pide:

a) [**1 punto**] Sea X un conjunto y $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Demostrar

$$c(A\triangle B) = (A \cap B) \cup (c(A) \cap c(B))$$

Donde $A\triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ es la diferencia simétrica.

b) [**1 punto**] Sea X un conjunto finito no vacío y $f : X \to X$ una aplicación. Demostrar:

$$f \text{ es biyectiva} \Longleftrightarrow f \text{ es inyectiva}$$

$\Longrightarrow$) Toda aplicación biyectiva es, en particular, inyectiva.

$\Longleftarrow$) Si escribimos $n = |X|$ tenemos por ser f inyectiva que los elementos del conjunto $\{f(x) : x \in X\} \subseteq X$ son todos distintos entre sí, y como tenemos n elementos de X el conjunto anterior debe tener exactamente n elementos, por lo que la imagen de X por f es un subconjunto de X con n elementos, luego ha de ser $Img(f) = X$, de donde f es sobreyectiva y como suponemos por hipótesis que f es inyectiva tenemos que f es biyectiva.

c) [**1 punto**] Sea X un conjunto finito no vacío e Y un subconjunto de X. Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ definida por

$$A \sim B \Longleftrightarrow A \cup Y = B \cup Y$$

La afirmación "$|\mathcal{P}(X)/\sim| = 1$" es

(i) siempre cierta.

(ii) siempre falsa.

(iii) a veces verdadera y a veces falsa, dependiendo de Y.

Justifique su respuesta.

La respuesta correcta es iii), ya que por ejemplo si $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{1\}$ tenemos entonces que:

$$X \cup Y = X, \qquad Y \cup Y = Y$$

Y como $X \neq Y$ tenemos que $|\mathcal{P}(X)/\sim| > 1$. Sin embargo, si para el mismo X tomamos $Y = X$ tenemos entonces que para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se tiene:

$$A \cup Y = A \cup X = X$$

Por lo que $|\mathcal{P}(X)/\sim| = 1$.

Ejercicio 2. Se pide:

a) **[1 punto]** Calcula el resto de dividir -3425 entre 19 y, haciendo uso de que la aplicación $R(\cdot; 19) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{19}$ es un homomorfismo de anillos, calcular el resto de dividir $234^3 + (-3425)^2$ entre 19.

Dividiendo primero 3425 entre 19 obtenemos que:

$$3425 = 19 \cdot 180 + 5$$

Observamos que $19 \cdot (-181) = -3439$ y que $3439 - 3425 = 14$, de donde:

$$-3425 = 19 \cdot (-181) + 14$$

Por lo que $R(-3425; 19) = 14$.

Para calcular el resto de $234^3+(-3425)^2$ entre 19 calculamos primero $R(234; 19)$, obteniendo:

$$234 = 19 \cdot 12 + 6 \quad \Longrightarrow \quad R(234; 19) = 6$$

Ahora:

$$R(234^3 + (-3425)^2; 19) \overset{(*)}{=} R(234; 19)^3 + R(-3425; 19)^2 = 6^3 + 14^2 = 216 + 196$$

donde en $(*)$ hemos aplicado que $R(\cdot; 19)$ es un homomorfismo de anillos. Si vemos ahora que:

$$\left\{\begin{array}{l} 216 = 19 \cdot 11 + 7 \\ 196 = 19 \cdot 10 + 6 \end{array}\right.$$

obtenemos entonces:

$$R(234^3 + (-3425)^2; 19) = 216 + 196 = 7 + 6 = 13$$

b) **[1 punto]** Demostrar que el elemento $3+2\sqrt{2}$ es una unidad en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ y calcular $(3 + 2\sqrt{2})^{-2}$.

c) **[1 punto]** Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Demostrar que el subconjunto $Img(f) \subseteq B$ es un subanillo de B.

Para ello, basta ver que:

- $1 \in Img(f)$. En efecto, tenemos que $A \ni 1 = f(1) \in Img(f)$, por ser f un homomorfismo de anillos.
- Si $\alpha, \beta \in Img(f) \Longrightarrow \alpha - \beta \in Img(f)$. En efecto, si $\alpha, \beta \in Img(f)$ tenemos entonces que existen $a, b \in A$ con $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, de donde:

  $$Img(f) \ni f(a - b) = f(a) - f(b) = \alpha - \beta$$

- Si $\alpha, \beta \in Img(f) \Longrightarrow \alpha\beta \in Img(f)$. En efecto, si $\alpha, \beta \in Img(f)$ tenemos que existen $a, b \in A$ con $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$, de donde:

  $$Img(f) \ni f(ab) = f(a)f(b) = \alpha\beta$$

Ejercicio 3. Sea $f = (x + 2)^5(x^5 + 3) + x^7 \in \mathbb{Z}_5[x]$ y denotemos también por $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ la aplicación polinómica definida por él, $r \mapsto f(r)$.

a) **[1.5 puntos]** Describir explícitamente la aplicación f.

b) **[1 punto]** ¿Es la aplicación f un homomorfismo de anillos? Si lo es probarlo, si no lo es ¿qué requisitos incumple?

c) **[1 puntos]** Describir explícitamente los conjuntos $f_*(f^*(\{1,2,4\}))$ y $f^*(f_*(\{1,2,4\}))$.